Kapitel VII
Über die Differentiation von zwei oder mehrere Variablen involvierenden Funktionen *

Leonhard Euler

§208 Wenn zwei oder mehrere variable Größen x, y, z in gar keiner Weise voneinander abhängen, kann es auftreten, dass, auch wenn alle variabel sind, dennoch, während eine einzige wächst oder schrumpft, die übrigen unverändert bleiben; weil sie nämlich festgelegt werden, keinen Zusammenhang zu haben, betrifft die Veränderung einer einzigen die übrigen nicht. Und auch die Differentiale von y und z werden daher nicht vom Differential von x abhängen und daher, während x um sein Differential dx vermehrt wird, können die Größen y und z entweder dieselben bleiben oder auf welche Weise auch immer nach Belieben variiert werden. Wenn daher also das Differential der Größe x als dx festgelegt wird, bleiben die Differentiale der übrigen Größen dy und dz unbestimmt und werden nach unserem Belieben entweder absolut betrachtet nichts oder unendlich kleine zu dx in einem gewissen Verhältnis stehende Größen bezeichnen.

§209 Meistens pflegen aber die Buchstaben y und z entweder unbekannte Funktionen von x oder solche, deren Relation zu x nicht betrachtet wird, zu bezeichnen und und diesem Fall werden deren Differentiale dy und dz eine

*Originaltitel: "De differentiatione functionum duas pluresve variabiles involventium", erstmals publiziert im Jahre 1755", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 10, pp 144-162", Eneström-Nummer E212, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz" gewisse Relation zu dx haben. Ob aber y und z von x abhängen oder nicht, die Art der Differentiation, welche wir hier betrachten, geht auf dasselbe zurück. Wir suchen nämlich das Differential einer Funktion, die aus mehreren Variablen x, y und z wie auch immer gebildet worden ist, welches Differential ihr zukommt, während die einzelnen Variablen x, y und z um ihre Differentiale dx, dy und dz wachsen. Um dieses also zu finden, werde in der vorgelegten Funktion überall anstelle der variablen Größen x, y, z respektive $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ geschrieben und vom auf diese Weise resultierenden Ausdruck die vorgelegte Funktion selbst abgezogen; der Rest wird das Differential selbst geben, welches gesucht wird, so wie aus der Natur der Differentiale vollkommen klar ist.

§210 Es sei X eine Funktion von x und ihr Differential oder ihre Vermehrung, während x um sein Differential dx wächst, sei $= Pdx$. Des Weiteren sei Y eine Funktion von y und ihr Differential $= Qdy$, welchen Zuwachs Y erhalte, während y in $y + dy$ übergeht, und Z sei eine Funktion von z und ihr Differential sei Rdz; diese Differentiale Pdx, Qdy, Rdz werden aus der Natur der Funktionen X, Y und Z mit Hilfe der oben gegebenen Vorschriften gefunden werden können. Wenn daher also diese Größe $X + Y + Z$ vorgelegt war, die natürlich eine Funktion der drei Variablen x, y und z sein wird, wird ihr Differential $= Pdx + Qdy + Rdz$ sein. Ob aber diese drei Differentiale zueinander homogen sind, ist unwichtig. Denn die Terme, die die Potenzen von x enthalten, verschwänden in Bezug auf Pdx gleichermaßen, wie wenn die übrigen Glieder Qdy und Rdz fehlen würden, und die gleiche Begründung gilt für die Terme, die in der Differentiation der Funktionen Y und Z weggelassen worden sind.

§211 Es mögen X, Y und Z dieselben Bezeichnungen beibehalten und es sei diese Funktion XYZ von x, y und z vorgelegt, deren Differential ausfindig gemacht werden muss. Weil ja, wenn $x + dx$ anstelle von x, $y + dy$ anstelle von y und $z + dz$ anstelle von z geschrieben wird, X in $X + Pdx$, Y in $Y + Qdy$ und Z in $Z + Rdz$ übergeht, wird die vorgelegte Funktion selbst übergehen in

$$(X + Pdx)(Y + Qdy)(Z + Rdz) = XYZ + YZPdx + XZQdy + XYRdz$$

$$+ZPQdxdy + YPRdxdz + XQRdydz + PQRdxdydz.$$

Aber weil dx, dy und dz unendlich klein sind, ob sie zueinander homogen sind oder nicht, verschwindet der letzte Term in Bezug auf jeden einzigen der vorhergehenden. Des Weiteren verschwindet der Term $ZPQdxdy$ so in Bezug auf $YZPdx$ wie in Bezug auf $XZQdy$; und wegen desselben Grundes werden die Terme $YPRdxdz$ und $XZQdy$ verschwinden. Nachdem also die vorgelegte Funktion XYZ selbst weggenommen worden ist, wird ihr Differential dieses sein

$$= YZPdx + XZQdy + XYRdz.$$

§212 Diese Beispiele von Funktionen der drei Variablen x, y und z, denen man nach Belieben jeder hinzufügen kann, genügen, um zu zeigen, wenn irgendeine Funktion der drei Variablen x, y und z vorgelegt wird, wie auch immer diese Variablen miteinander vermischt worden sind, dass ihr Differential immer eine Form dieser Art haben wird $pdx + qdy + rdz$, wo p, q und r einzeln Funktionen entweder aller drei Variablen x, y und z oder nur von zwei oder gar nur von einer einzigen sein werden, je nachdem wie die Zusammensetzungsart, auf welche die vorgelegte Funktion aus den Variablen x, y und z und Konstanten gebildet wird, aussieht. Auf die gleiche Weise, wenn eine Funktion von vier oder mehreren Variablen x, y, z und v vorgelegt wird, wird ihr Differential eine Form dieser Art haben

$$pdx + qdy + rdz + sdv.$$

§213 Wir wollen zuerst eine Funktion von nur zwei Variablen x und y betrachten, welche $= V$ sei, deren Differential sich also so verhalten wird, dass gilt

$$dV = pdx + qdy.$$

Wenn also die Größe y als konstant angenommen werden würde, wäre $dy = 0$ und daher wäre das Differential der Funktion V pdx; wenn aber x konstant festgelegt werden würde, dass $dx = 0$ wäre und allein y variabel bliebe, dann ginge das Differential von V als $= qdy$ hervor. Weil also, nachdem jede der beiden Größen x und y variabel festgelegt worden ist, $dV = pdx + qdy$ ist, wird diese Regel für das Differenzieren einer Funktion V, die die zwei Variablen x und y involviert, resultieren:

Es werde zuerst allein x variabel festgelegt, die andere y werde hingegen als Konstante behandelt und es werde das Differential von V gesucht, welches $= pdx$ sei. Darauf werde allein die Größe y variabel festgelegt, wohingegen die andere x für konstant gehalten worden ist, und es werde das Differential von V gesucht, welches $= qdy$ sei. Nachdem dies getan worden ist und jede der beiden Größen variabel festgelegt worden ist, wird $dV = pdx + qdy$ werden.

§214 Auf die gleiche Weise, weil das Differential einer Funktion der drei Variablen x, y und z, die $= V$ sei, eine Form von dieser Art hat

$$dV = pdx + qdy + rdz,$$

ist es offenbar, wenn allein die Größe x variabel festgelegt worden wäre, die übrigen y und z hingegen konstant geblieben wären, dass wegen $dy = 0$ und $dz = 0$ das Differential von V als $= pdx$ hervorgegangen wäre. Auf die gleiche Weise fände man das Differential von $V = qdy$, wenn x und z konstant wären und allein z variabel festgelegt werden würde; und wenn x und y als Konstanten behandelt werden würden und allein z variabel festgelegt werden würde, ginge das Differential von V als $= rdz$ hervor. Daher werde, um eine Funktion dreier Variablen zu differenzieren, jede beliebige Größe einzeln variabel betrachtet und die Funktion dann nach jeder einzelnen differenziert, als wenn alle übrigen konstant wären; dann sammle man diese einzelnen Differentiale, die aus den einzelnen variablen Größen gefunden worden sind, und das Aggregat wird das gesuchte Differential der vorgelegten Funktion sein.

§215 In dieser Regel, welche wir für die Differentiation einer Funktion wie vieler Variablen auch immer gefunden haben, ist der Beweis der oben (§ 170) gegebenen allgemeinen Regel enthalten, mit deren Hilfe irgendeine eine einzige Variable umfassende Funktion differenziert werden kann. Wenn nämlich für die einzelnen dort aufgeführten Teile ebenso viele verschiedene Buchstaben an die entsprechende Stelle gesetzt werden, wird die Funktion die Gestalt einer Funktion ebenso vieler verschiedener Variablen annehmen und daher auf die hier beschriebene differenziert werden, indem nacheinander jeweils ein einziger Teil, als wäre er variabel, behandelt wird und alle Differentiale, die aus den einzelnen Teilen entspringen, zu einer Summe zusammengefasst werden; diese Summe wird das gesuchte Differential sein, nachdem für die einzelnen Werte wieder die einzelnen Werte eingesetzt worden sind. Diese

Regel erstreckt sich also sehr weit und wird auch auf Funktionen mehrerer Variablen, auf welche Weise auch immer sie beschaffen waren, ausgedehnt. Daher ist ihr Nutzen durch das ganze Differentialkalkül hindurch überaus groß.

§216 Nachdem also die allgemeine Regel gefunden worden ist, mit deren Hilfe Funktionen wie vieler Variablen auch immer differenziert werden können, wird es förderlich sein, ihren Gebrauch an einigen Beispielen beleuchtet zu haben.

I. Wenn $V = xy$ war, wird gelten

$$dV = xdy + ydx.$$

II. Wenn $V = \frac{x}{y}$ war, wird sein

$$dV = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}.$$

III. Wenn $V = \frac{y}{\sqrt{aa-xx}}$ war, wird gelten

$$dV = \frac{dy}{\sqrt{aa-xx}} + \frac{yxdx}{(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

IV. Wenn $V = (\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n$ ist, wird gelten

$$\begin{aligned} dV &= m(\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n(\alpha dx + \beta dy) \\ &\quad + n(\alpha x + \beta y + \gamma)^m(\delta x + \varepsilon y + \zeta)^{n-1}(\delta dx + \varepsilon dy) \end{aligned}$$

oder

$$dV = (\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta + \varepsilon y + \zeta)^{n-1} \quad \text{mal}$$

$$\left(\left.\begin{matrix} + m\alpha\delta \\ + n\alpha\delta \end{matrix}\right\} xdx \quad \left.\begin{matrix} + m\beta\delta \\ + n\alpha\varepsilon \end{matrix}\right\} xdy \quad \left.\begin{matrix} + m\alpha\varepsilon \\ + n\beta\delta \end{matrix}\right\} ydy \quad \left.\begin{matrix} + m\beta\varepsilon \\ + n\beta\varepsilon \end{matrix}\right\} ydy \quad \left.\begin{matrix} + m\alpha\zeta \\ + n\gamma\delta \end{matrix}\right\} dx \quad \left.\begin{matrix} + m\beta\zeta \\ + n\gamma\varepsilon \end{matrix}\right\} dy \right).$$

V. Wenn $V = y \log x$ war, wird gelten

$$dV = dy \log x + \frac{ydx}{x}.$$

VI. Wenn $V = x^y$ war, wird gelten

$$dV = yx^{y-1}dx + x^y + dy \log x.$$

VII. Wenn $V = \arctan \frac{y}{x}$ war, wird sein

$$dV = \frac{xdy - ydx}{xx + yy}.$$

VIII. Wenn $V = \sin x \cos y$ war, wird sein

$$dV = dx \cos x \cos y - dy \sin x \sin y.$$

IX. Wenn $V = \frac{e^z y}{\sqrt{xx+yy}}$ war, wird sein

$$dV = \frac{e^z ydz}{\sqrt{xx+yy}} + \frac{e^z(xxdy - yxdx)}{(xx+yy)\sqrt{xx+yy}}.$$

X. Wenn $V = e^z \arcsin \frac{x-\sqrt{xx-yy}}{x+\sqrt{xx-yy}}$, wird aufgefunden werden

$$dV = e^z dz \arcsin \frac{x-\sqrt{xx-yy}}{x+\sqrt{xx-yy}} + e^z \cdot \frac{xydy - yydx}{(x+\sqrt{xx-yy})(xx-yy)^{\frac{3}{4}}\sqrt{x}}$$

§217 Weil wir ja gesehen haben, wenn V irgendeine Funktion der zwei Variablen x und y war, dass ihr Differential eine Form von dieser Art haben wird $dV = Pdx + Qdy$, in welcher P und Q irgendwelche von der Funktion V abhängende und durch sie bestimmte Funktionen sind, folgt, dass diese zwei Größen P und Q auf bestimmte Weise voneinander abhängen müssen, deshalb weil jede der beiden Größen von derselben Funktion V abhängt. Was für ein Zusammenhang also auch immer zwischen den endlichen Größen P und Q besteht, welchen wir später ausfindig machen werden, es ist klar, dass nicht alle Differentialformeln von dieser Art $Pdy + Qdy$, in denen P und Q nach Belieben aus x und y gebildet worden sind, Differentiale einer bestimmten endlichen Funktion V von x und y sein können. Denn wenn keine Relation zwischen x und y besteht, welche die Natur der Differentiation erfordert, hat ein Differential von dieser Art $Pdx + Qdy$ überhaupt nicht durch Differentiation entstehen können und wird daher umgekehrt kein Integral haben.

§218 Bei der Integration ist es also sehr hilfreich, diese Relation zwischen den Größen P und Q zu kennen, dass die Differentiale, die in Wirklichkeit aus der Differentiation einer gewissen endlichen Funktion entsprungen sind, von denen unterschieden werden können, die nach Belieben gebildet worden sind und keine Integrale zulassen. Obwohl wir aber hier noch nicht die Integration in Angriff nehmen, wird es dennoch, um die Natur von reellen Differentialen gründlicher zu beleuchten, förderlich sein, diese Relation ausfindig zu machen; deren Erkenntnis ist natürlich nicht nur für die Integralrechnung, zu welcher wir den Weg bereiten, in höchstem Maße notwendig, sondern schafft auch für die Differentialrechnung selbst ein besseres Verständnis. Zuerst tritt es also klar zu tage, wenn V eine Funktion der zwei Variablen x und y ist, dass in ihrem Differential $Pdx + Qdy$ das Differential jeder der beiden dx und dy enthalten sein muss. Und ist kann daher auch weder $P = 0$ noch $Q = 0$ sein. Daher, wenn P eine Funktion von x und y war, wird die Formel Pdx kein Differential von endlicher Größe sein können oder es existiert keine endliche Größe, deren Differential Pdx ist.

§219 So ist keine endliche Größe V gegeben, ob algebraisch oder transzendent, deren Differential $yxdx$ ist, wenn freilich y eine variable von x nicht abhängende Größe ist. Wenn wir nämlich festlegen, dass eine endliche Größe V solcher Art gegeben ist, weil y in ihr Differential eingeht, ist es notwendig, dass y auch in der Größe V selbst enthalten ist; aber wenn V y enthielte, müsste wegen der Veränderlichkeit von y notwendigerweise auch im Differential von V das Differential dy enthalten sein. Weil dies dennoch nicht vorhanden ist, kann es nicht geschehen, dass das Differential $yxdx$ aus der Differentiation einer gewissen endlichen Größe entstanden ist. Weil also klar zu tage tritt, dass die Formel $Pdy + Qdy$, wenn $Q = 0$ ist und P y enthält, kein reelles Integral sein kann, wird zugleich eingesehen, dass der Größe Q nicht nach Belieben ein Wert zugeteilt werden kann, sondern dieser vom Wert von P abhängt.

§220 Um also diese Relation zwischen P und Q im Differential $dV = Pdx + Qdy$ ausfindig zu machen, wollen wir zuerst festlegen, dass V eine Funktion von keiner keiner Dimension von x und y ist; denn wir wollen von speziellen Fällen zur allgemeinen Relation voranschreiten. Wenn wir daher also $y = tx$ setzen, wird die Größe x völlig aus der Funktion V verschwinden und es wird eine Funktion nur von t hervorgehen, welche $= T$ sei, deren Differential θdt

sei, während θ eine Funktion von t ist. Wir wollen also auch im Differential $Pdx + Qdx$ überall $y = tx$ und $dy = tdx + xdt$ setzen, wonach $Pdx + Qtdx + Qxdt$ hervorgehen wird, weil in welchen dx nicht enthalten ist, ist es nötig, dass $P + Qt = 0$ und daher $Q = -\frac{P}{t} = -\frac{Px}{y}$ ist, oder es wird gelten

$$Px + Qy = 0,$$

woher die Relation zwischen P und Q für diesen Fall bekannt wird. Des Weiteren muss $\theta = Qx$ und daher $Qx =$ einer Funktion von t sein, das heißt einer Funktion keiner Dimension von x und y. Und wegen $Q = \frac{\theta}{x}$ wird $P = -\frac{\theta y}{yy}$ werden und so Px wie Qy werden Funktionen keiner Dimension von x und y sein.

§221 Wenn also eine Funktion keiner Dimension von x und y, die $= V$ sei, differenziert wird, wird ihr Differential $dV = Pdx + Qdy$ immer so beschaffen sein, dass $Px + Qy = 0$ ist. Das heißt: Wenn im Differential anstelle der Differentiale dx und dy x und y geschrieben werden, wird die Größe $0 =$ resultieren, wie es in diesen Beispielen zu passieren klar ist.

I. Es sei $V = \frac{x}{y}$; es wird sein

$$dV = \frac{ydx - xdy}{yy}$$

und nach Setzen von x anstelle von dx und y anstelle von dy wird $\frac{yx-xy}{yy} = 0$ sein.

II. Es sei $V = \frac{x}{\sqrt{xx-yy}}$; es wird sein

$$dV = \frac{-yydx + yxdy}{(xx-yy)^{\frac{3}{2}}},$$

woher $\frac{-yyyx+yyx}{(xx-yy)^{\frac{3}{2}}} = 0$ wird.

III. Es sei $V = \frac{y+\sqrt{xx+yy}}{-y+\sqrt{xx+yy}}$, welches eine Funktion keiner Dimension von x und y ist; es wird gelten

$$dV = \frac{2xxdy - 2xydx}{(\sqrt{xx-yy} - y)^2\sqrt{xx+yy}},$$

welche Form nach Setzen von x und y anstelle von dx und $dy = 0$ wird.

IV. Es sei $V = \log \frac{x+y}{x-y}$; es wird gelten

$$dV = \frac{2xdy - 2ydx}{xx - yy}$$

und $\frac{2xy-2yx}{xx-yy} = 0$ sein.

V. Es sei $V = \arcsin \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$; es wird gelten

$$dV = \frac{ydx - xdy}{(x+y)\sqrt{2y(x-y)}},$$

welche Form sich derselben Eigenschaft erfreut.

§222 Wir wollen nun andere homogene Funktionen betrachten und es sei V eine Funktion von n Dimensionen von x und y. Daher, wenn $y = tx$ gesetzt wird, wird V eine Form von dieser Art Tx^n annehmen, während T eine Funktion von t und $dT = \theta dt$ ist; es wird gelten

$$dV = x^n \theta dt + nTx^{n-1}dx.$$

Wir wollen nun andere homogene Funktionen betrachten und es sei V eine Funktion von n Dimensionen von x und y. Daher, wenn $y = tx$ gesetzt wird, wird V eine Form von dieser Art annehmen Tx^n, während T eine Funktion von t ist, und es sei $dT = \theta dt$; es wird gelten

$$dV = x^n \theta dt + nTx^{n-1}dx.$$

Wenn wir daher also $dV = Pdx + Qdy$ setzen, wird wegen $dy = tdx + xdt$ werden

$$dV = Pdx + Qtdx + Qxdt;$$

weil diese Form ja mit jener übereinstimmen muss, wird gelten

$$P + Qt = nTx^{n-1} = \frac{nV}{x}$$

- wegen $V = Tx^n$. Dieser Sache wegen wird aufgrund von $t = \frac{y}{x}$ werden

$$Px + Qy = nV,$$

welche Gleichung die Relation zwischen P und Q so bestimmt, dass, wenn die eine Größe bekannt ist, die andere leicht gefunden wird. Weil weiter $Qx = x^n\theta$ ist, wird Qx und daher ach Qy und Px eine Funktion von n Dimensionen von x und y sein.

§223 Wenn also im Differential einer gewissen homogenen Funktion von x und y anstelle von dx und dy x und y gesetzt wird, wird die entspringende Größe der Funktion selbst gleich werden, deren Differential vorgelegt wurde, nur mit der Anzahl der Dimensionen multipliziert.

I. Wenn $V = \sqrt{xx+yy}$ ist, wird $n = 1$ sein und wegen

$$dV = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx+yy}}$$

werden

$$\frac{xx+yy}{\sqrt{xx+yy}} = V = \sqrt{xx+yy}.$$

II. Wenn $V = \frac{y^3+x^3}{y-x}$ ist, wird $n = 2$ sein und gelten

$$dV = \frac{2y^3dy - 3yyxdy + 3yxxdx - 2x^3dx - 2x^3dx + y^3dx - x^3dy}{(y-x)^2}.$$

Es werde x für dx und y für dy gesetzt; es wird entspringen

$$\frac{2y^4 - 2y^3x + 2yx^3 - 2x^4}{(y-x)^2} = \frac{2y^3 + 2x^3}{y-x} = 2V.$$

III. Wenn $V = \frac{1}{(yy+xx)^2}$ ist, wird $n = -4$ sein sowie

$$dV = -\frac{4ydy + 4xdy}{(yy+xx)^3}.$$

Diese Formel geht, nachdem x und y anstelle von dx und dy gesetzt worden ist, über in

$$-\frac{4yy+4xx}{(xx+yy)^3} = -4V.$$

IV. Wenn $V = xx\log\frac{y+x}{y-x}$ ist, wird $n = 2$ sein sowie

$$dV = 2xdx\log\frac{y+x}{y-x} + \frac{2xx(ydx - xdy)}{yy - xx};$$

Nachdem aber die erwähnte Substitution durchgeführt worden ist, entspringt

$$2xx\log\frac{y+x}{y-x} = 2V.$$

§224 Die gleiche Eingenschaft wird beobachtet werden, wenn V eine homogene Funktion von mehreren Variablen war; es sei also V eine der Größen x, y, z, welche zusammengenommen überall n auffüllen, und das Differential wird eine Form dieser Art haben $Pdx + Qdy + Rdz$. Es werde nun $y = tx$ und $z = sx$ gesetzt, dass gilt

$$dy = tdx + xdt \quad \text{und} \quad dz = sdx + xds,$$

und die Funktion V wird diese Form Ux^n annehmen, während U eine Funktion der zwei Variablen t und s ist; daher wird also, wenn $dU = pdt + qds$ gesetzt wird, werden

$$dV = x^n pdt + x^n qds + nUx^{n-1}dx.$$

Die erste Form wird aber geben

$$dV = Pdx + Qdtdx + Qxdt + Rsdx + Rxds;$$

diese liefert mit jener verglichen

$$P + Qt + Rs = nUx^{n-1} = \frac{nV}{x},$$

woher erhalten wird

$$Px + Qy + Rz = nV;$$

diese selbe Eigenschaft wird auf wie viele Variablen auch immer ausgedehnt.

§225 Wenn also eine homogene Funktion wie vieler Variablen x, y, z, v auch immer vorgelegt war, wird ihr Differential immer diese Eigenschaft haben, dass, wenn anstelle der Differentiale dx, dy, dz, dv etc. respektive die endlichen Größen x, y, z, v etc. geschrieben werden, die vorgelegte Funktion selbst mit der Anzahl der Dimensionen multipliziert hervorgeht. Und diese Regel gilt auch, wenn V eine homogene Funktion nur der einen Variable x war. In diesem Fall wird V nämlich eine Potenz von x sein, beispielsweise $V = ax^n$, welche eine homogene Funktion von n Dimensionen ist; natürlich ist keine andere Funktion von x gegeben, in welcher x überall n Dimensionen festlegt außer der Potenz x^n. Weil also $dV = nax^{n-1}dx$ ist, werde x anstelle von dx gesetzt und es wird nax^n hervorgehen, das heißt nV. Diese wunderbare Eigenschaft von homogenen Funktionen verdient es also sorgfältig bemerkt und sich eingeprägt zu werden, weil sie in der Integralrechnung einen sehr großen Nutzen mit sich bringt.

§226 Um nun im Allgemeinen nach der Relation zwischen den Größen P und Q, die das Differential $Pdx + Qdy$ irgendeiner Funktion V der zwei Variablen x und y festlegen, zu suchen, wird auf die folgenden Dinge zu achten sein. Es sei also V irgendeine Funktion von x und y und wir wollen festlegen, dass V und R übergeht, wenn anstelle von x $x + dx$ gesetzt wird; nachdem aber $y + dy$ anstelle von y gesetzt worden ist, gehe V in S über; wenn daher aber zugleich $x + dx$ anstelle von x und $y + dy$ anstelle von y geschrieben wird, werde V in V^{I} verwandelt. Weil deshalb R aus V entspringt, nachdem $x + dx$ anstelle von x gesetzt worden ist, ist es offenbar, wenn weiter in R $y + dy$ anstelle von y gesetzt wird, dass dann V^{I} hervorgeht; es ist nämlich dasselbe, wie wenn in V sofort $x + dx$ anstelle von x und $y + dy$ anstelle von y gesetzt werden würde. Auf die gleiche Weise, wenn in S $x + dx$ anstelle von x gesetzt wird, weil S schon aus V entsprungen ist, wird, nachdem $y + dy$ anstelle von y gesetzt worden ist, erneut V^{I} hervorgehen, wie aus diesem Schema besser verstanden wird.

Die Größe	geht über in	wenn anstelle von	gesetzt wird
V	R	x	$x + dx$
V	S	y	$y + dy$
V	V^{I}	x y	$x + dx$ $y + dy$
R	V^{I}	y	$y + dy$
S	V^{I}	x	$x + dx$

§227 Wenn also V so differenziert wird, dass nur x als Variable, y hingegen als Konstante behandelt wird, weil nach Setzen von $x + dx$ anstelle von x die Funktion V in R übergeht, wird ihr Differential $= R - V$ sein; aber aus der Form $dV = Pdx + Qdy$ folgt, dass dasselbe Differential $= Pdx$ sein wird, woher $R - V = Pdx$ sein wird. Wenn daher nun anstelle von y $y + dy$ gesetzt wird, x hingegen als Konstante behandelt wird, weil R in V^{I} und V in S übergeht, wird die Größe $R - V$ in $V^{\mathrm{I}} - S$ übergehen und daher wir das Differential von $R - V = Pdx$, welches entspringt, wenn allein y variabel angenommen wird, sein:

$$= V^{\mathrm{I}} - R - S + V.$$

Auf die gleiche Weise, weil für $y + dy$ anstelle von y gesetzt V in S übergeht, wird $S - V$ das Differential für allein variabel festgelegtes y sein und wird deshalb $S - V = Qdy$ sein; weil nun für $d + dx$ anstelle von x gesetzt S in V^{I} und V in R übergeht, wird die Größe $S - V$ in $V^{\mathrm{I}} - R$ übergehen und das Differential von $S - V = Qdy$, welches entspringt, wenn allein x variabel festgelegt wird, wird sein

$$= V^{\mathrm{I}} - R - S + V,$$

was völlig mit dem zuvor gefundenen Differential übereinstimmt.

§228 Aus dieser Übereinkunft wird die folgende Schlussfolgerung abgeleitet: Wenn das Differential irgendeiner Funktion V der zwei Variablen x und y $dV = Pdx + Qdy$ war, dann wird das Differential von Pdx, welches entspringt, wenn allein die Größe y als Variable, x hingegen wie eine Konstante behandelt wird, gleich dem Differential von Qdy sein, welches entspringt, wenn allein die Größe x wie eine Variable, y hingegen als Konstante behandelt wird. Wenn natürlich für allein variabel festgelegtes y $dP = Zdy$ war, wird das auf die vorgeschriebene Weise genommene Differential von $Pdx = Zdxdy$ sein; und für allein variabel festgelegtes x wird auch $dQ = Zdx$ sein; so wird nämlich das auf die vorgeschriebene Weise genommene Differential von Qdy auch $= Zdxdy$ werden. Und auf diese Weise wird die Relation erkannt, die zwischen den Größen P und Q besteht und in diesen wenigen Worten besteht, dass das Differential von Pdx für konstant gesetztes x gleich dem Differential von Qdy für konstant gesetztes y ist.

§229 Diese vorzügliche Eigenschaft wird besser verstanden werden, wenn wir sie an einigen Beispielen illustrieren.

I. Es sei also $V = xy$; es wird gelten

$$dV = ydx + xdy$$

und daher

$$P = y \quad \text{und} \quad Q = x;$$

daher wird für konstant gesetztes x gelten

$$d.Pdx = dxdy$$

und für konstant gesetztes y wird gelten

$$d.Qdy = dxdy$$

und so werden diese zwei Differentiale einander gleich.

II. Es sei $V = \sqrt{xx + 2xy}$; es wird sein

$$dV = \frac{xdx + ydx + xdy}{\sqrt{xx + 2xy}}$$

und daher

$$P = \frac{x + y}{\sqrt{xx + 2xy}} \quad \text{und} \quad Q = \frac{x}{\sqrt{xx + 2yy}},$$

woher für konstant gesetztes x sein wird

$$d.Pdx = \frac{xydxdy}{(xx+2xy)^{\frac{3}{2}}}$$

und für konstant festgelegtes y gelten wird

$$d.Qdx = \frac{xydxdy}{(xx+2xy)^{\frac{3}{2}}}.$$

III. Es sei $V = x\sin y + y\sin x$ und es wird sein

$$dV = dx\sin y + xdy\cos y + dy\sin x + ydx\cos x.$$

Daher wird gelten

$$Pdx = dx\sin y + ydx\cos x \quad \text{und} \quad Qdy = dy\sin x + xdy\cos y.$$

Für konstant gesetztes x wird also gelten

$$d.Pdx = dxdy\cos y + dxdy\cos x$$

und für konstant gesetztes y wird gelten

$$d.Qdy = dxdy\cos y + dxdy\cos x.$$

IV. Es sei $V = x^y$; es wird gelten

$$dV = x^y dy\log x + yx^{y-1}dx$$

sowie

$$Pdx = yx^{y-1}dx \quad \text{und} \quad Qdy = x^y dy\log x.$$

deswegen wird man für konstant gesetztes x haben

$$d.Pdx = x^{y-1}dxdy + yx^{y-1}dxdy\log x$$

und für konstant gesetztes y wird gelten

$$d.Qdy = yx^{y-1}dxdy\log y + x^{y-1}dxdy.$$

§230 Diese Eigenschaft kann auch auf diese Weise dargestellt und beschrieben werden, woher die außergewöhnliche Beschaffenheit von allen Funktionen, die zwei Variablen involvieren, erkannt werden wird. Wenn irgendeine Funktion V der zwei Variablen x und y allein nach der Variable x und dieses Differential erneut allein nach der Variable y differenziert wird, dann wird nach dieser zweifachen Differentiation dasselbe hervorgehen wie wenn in umgekehrter Reihenfolge die Funktion V zuerst allein nach der Variable y und differenziert werden würde und dieses Differential allein nach der Variable x erneut differenziert werden würde; in jedem der beiden Fälle wird natürlich derselbe Ausdruck dieser Form $Zdxdy$ hervorgehen. Die Begründung dieser Identität folgt natürlich aus der vorhergehenden Eigenschaft; wenn nämlich V für allein variabel festgelegtes x differenziert wird, geht Pdx hervor, und wenn V nach allein variabel festgelegtem y differenziert wird, geht Qdy hervor; dass die auf die angegebene Weise genommenen Differentiale dieser Differentiale in der Tat einander gleich sind, haben wir zuvor bewiesen. Im Übrigen folgt diese natürliche Eigenschaft unmittelbar aus der in § 227 gegebenen Begründung.

§231 Die Relation zwischen P und Q, wenn $Pdx + Qdy$ ein Differential der Funktion V war, kann auch auf die folgende Weise angezeigt werden. Weil ja P und Q Funktionen von x und y sind, werden werden nach jeder der beiden Variablen x und y differenziert. Wenn natürlich $dV = Pdx + Qdy$ war, sei

$$dP = pdx + rdy \quad \text{und} \quad dQ = q + dx + sdy.$$

Für konstant gesetztes x wird also gelten

$$dp = rdy \quad \text{und} \quad d.Pdx = rdxdy.$$

Darauf wird für konstant gesetztes y gelten

$$dQ = qdx \quad \text{und} \quad d.Qdy = qdxdy.$$

Weil also diese zwei Differentiale $rdxdy$ und $qdxdy$ einander gleich sind, folgt, dass gelten wird

$$q = r.$$

Die Funktionen P und Q sind also so miteinander verbunden, dass, wenn die beiden differenziert werden, wie wir es gemacht haben, die Größen q und r einander gleich werden. Der Kürze wegen pflegen aber zumindest in diesem Kapitel die Größen r und q vorteilhaft so bezeichnet zu werden, dass r mit $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ angezeigt wird, mit welchem Zeichen angedeutet wird, dass P so differenziert wird, dass allein y als Variable behandelt wird und dieses Differential durch dy dividiert wird; so wird nämlich die endliche Größe r hervorgehen. Auf die gleiche Weise wird $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ die endliche Größe q bedeuten, weil auf diese Weise angezeigt wird, dass die Funktion Q allein nach der Variable x differenziert werden und dann das Differential durch dx dividiert werden muss.

§232 Wir wollen also diese Schreibweise gebrauchen, auch wenn sie anders aufgefasst zu Missverständnissen führen kann, die dennoch hier durch die Klammern direkt aufgeklärt werden, dass wir Verwirrungen beim Beschreiben der Differentiationsbedingungen vermeiden, und so werden wir die Relation zwischen P und Q auf diese Weise kurz in Worten ausdrücken können, dass wir sagen, dass gilt

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Bei Brüchen dieser Art zeigt natürlich der Nenner außer der eigenen Bedeutung, nach welcher der Zähler durch ihn dividiert werden muss, an, dass das Differential des Zählers so zu nehmen ist, dass allein die Größe, deren Differential den Nenner festlegt, als Variable angesehen wird. Denn auf diese Weise werden die Differentiale völlig aus der Rechnung herausgehen und diese Brüche $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dq}{dx}\right)$ werden endliche Größen darstellen, die im gegenwärtigen Fall einander gleich sein werden. Deshalb wird es auch möglich sein, die Größen p und s auf die eingeführte weise so bezeichnen, dass gilt

$$p = \left(\frac{dP}{dx}\right) \quad \text{und} \quad s = \left(\frac{dQ}{dy}\right),$$

wenn freilich, wie es erwähnt worden ist, die Differentiation des Zählers durch den Nenner eingeschränkt wird.

§233 Diese Eigenschaft stimmt in wunderbarer Weise mit der Eigenschaft überein, welche wir zuvor bei homogenen Funktionen aufzutreten gezeigt haben. Es sei nämlich V eine homogene Funktion von n Dimensionen von x und y und es werde $dV = Pdx + Qdy$ gesetzt und wir haben bewiesen, dass $nV = Px + Qy$ sein wird und daher gelten wird

$$Q = \frac{nV}{y} - \frac{Px}{y}.$$

Es sei $dP = pdx + rdy$ und es wird gelten

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = r,$$

welchem Ausdruck $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ gleich zu sein, so gezeigt wird: Q werde allein nach der Variable x differenziert, und weil nach dieser Annahme gilt

$$dQ = \frac{nPdx}{y} - \frac{Pdx}{y} - \frac{xpdx}{y},$$

wird werden

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y}$$

und es wird gelten müssen

$$\frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y} = r \quad \text{oder} \quad (n-1)P = px + ry.$$

Diese Gleichheit wird daher klar, weil P eine homogene Funktion von $n-1$ Dimensionen von x und y ist, woher ihr Differential $dP = pdx + rdy$ wegen der Eigenschaft homogener Funktion so beschaffen sein muss, dass $(n-1)P = px + ry$ ist.

§234 Diese Eigenschaft, dass $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ist, welche wir allen Funktionen der zwei Variablen x und y gemeinsam zu sein gezeigt haben, wird uns auch die Natur der Funktionen von drei oder mehr Variablen offenbaren. Es sei also V irgendeine Funktion der drei Variablen x, y und z und es werde festgelegt

$$dV = Pdx + Qdy + Rdz.$$

Wenn daher also in dieser Differentiation z wie eine Konstante behandelt werden würde, wäre natürlich $dV = Pdx + Qdy$; in diesem Fall muss aber durch die vorhergehenden Dinge $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ sein. Wenn darauf die Größe y konstant angenommen werden würde, wäre $dV = Pdx + Rdz$; es wird also

$\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$. Schließlich wird für konstant gesetztes x $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$ aufgefunden werden. Also hängen im Differential $Pdx + Qdy + Rdz$ der Funktion V die Größen P, Q und R so voneinander ab, dass gilt

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right), \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

§235 Daher folgt diese Eigenschaft von Funktionen, die drei oder mehr Variablen involvieren, natürlich der analog, welche wir oben (§ 230) über Funktionen von zwei Variablen gezeigt haben. Wenn also V irgendeine Funktion der drei Variablen x, y und z war und sie nacheinander dreimal differenziert wird, so dass zuerst eine einzige der Größen, beispielsweise x, allein variabel festgesetzt wird, in der zweiten Differentiation allein y und in der dritten allein z variabel angenommen wird, wird ein Ausdruck dieser Form $Zdxdydz$ hervorgehen, welcher selbe aufgefunden werden wird, in welcher anderen Reihenfolge auch immer die Größen x, y und z angeordnet werden. Es wird also auf sechs verschiedene Weisen nach dreifacher Differentiation zu demselben Ausdruck $Zdxdydz$ gelangt werden, weil ja die Reihenfolge der Größen x, y und z sechsmal verändert werden kann. Welche Reihenfolge auch immer also ausgewählt wird, wenn die Funktion V allein nach der ersten Variable differenziert wird und dieses Differential erneut allein nach der zweiten Variable differenziert wird und dieses Differential wiederum allein nach der dritten Variable differenziert wird, es wird derselbe Ausdruck hervorgehen, wie auch immer die Reihenfolge der Größen x, y und z verändert wird.

§236 Damit der Grund für diese Eigenschaft besser erkannt wird, wollen wir festlegen, dass gilt

$$dV = Pdx + Qdy + Rdz;$$

des Weiteren wollen wir auch die Größen P, Q und R differenzieren und deren Differentiale werden durch das zuvor Bewiesene so beschaffen sein

$$\begin{aligned} dP &= pdx + sdy + tdz \\ dQ &= sdx + qdy + udz \\ dR &= tdx + udy + rdz. \end{aligned}$$

Nun werde V für allein variabel festgelegtes x differenziert, es wird Pdx hervorgehen; dieses Differential werde wiederum für allein variabel festgelegtes y differenziert und man wird $sdxdy$ haben; wenn dies für allein variabel festgelegtes z differenziert wird, wird, nachdem durch $dxdydz$ dividiert worden ist, $\left(\frac{ds}{dz}\right)$ erhalten werden. Nun werden die Variablen in der Reihenfolge y, x, z angeordnet und die erste Differentiation wird Qdy geben, die zweite $sdxdx$ und die dritte (nach Division durch $dxdydz$) wird $\left(\frac{ds}{dz}\right)$ geben wie zuvor. Die Variablen werden nun in der Reihenfolge z, y, x angeordnet und die erste Differentiation wird Rdz geben, die zweite $udydz$, die dritte liefert hingen nach der Division durch $dxdydz$ $\left(\frac{du}{dx}\right)$. Aber weil für konstant gesetztes y $dQ = sdx + udz$ ist, wird $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$ sein, wie gleichermaßen bewiesen worden ist.

§237 Wir wollen festlegen, dass gilt

$$V = \frac{xxy}{aa - zz}$$

und diesen Bruch sooft dreimal differenzieren, wie die Reihenfolge der Variablen x, y, z verändert werden kann.

	I. Differ.	*II. Differ.*	*III. Differ.*
für allein variabel festgelegtes	x	y	z
	$\frac{2xydx}{aa-zz}$,	$\frac{2xdxdy}{aa-zz}$,	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
für allein variabel festgelegtes	x	z	y
	$\frac{2xydx}{aa-zz}$,	$\frac{4xyzdxdz}{aa-zz}$,	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
für allein variabel festgelegtes	y	x	z
	$\frac{xxdy}{aa-zz}$,	$\frac{2xdxdy}{aa-zz}$,	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
für allein variabel festgelegtes	y	z	x
	$\frac{xxdy}{aa-zz}$,	$\frac{2xxzdydz}{(aa-zz)^2}$,	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
für allein variabel festgelegtes	z	x	y
	$\frac{2xxyzdz}{aa-zz}$,	$\frac{4xyzdxdz}{(aa-zz)^2}$,	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$
für allein variabel festgelegtes	z	y	x
	$\frac{2xxyzdz}{(aa-zz)^2}$,	$\frac{2xxzdydz}{(aa-zz)^2}$,	$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$.

Aus diesem Beispiel tritt es klar zutage, in welcher Reihenfolge auch immer die drei Variablen angenommen waren, dass nach dreifacher Differentiation immer derselbe Ausdruck hervorgeht, selbstredend:

$$\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}.$$

§238 Wie aber nach dreifacher Differentiation zu demselben Ausdruck gelangt worden ist, so wird eine Übereinstimmung auch bei den Differentialen entdeckt, die die zweite Differentiation an die Hand gegeben hat. In ihnen taucht natürlich jeder Ausdruck zweimal auf; daher tritt es klar zu tage, dass die Formeln, die mit denselben Differentialen behaftet sind, auch einander gleich sind und die dritten Differentiale daher alle einander gleich sind, weil sie mit denselben Differentialen $dxdydz$ behaftet sind. Daher schließen wir also, wenn V eine Funktion wie vieler Variablen x, y, z, v, u etc. auch immer war und sie nacheinander einige Male differenziert wird, dass immer nur eine einzige Größe als Variable angenommen wird, dass dann, sooft zu Ausdrücken gelangt wird, die mit denselben Differentialen behaftet sind, sie auch einander gleich sein werden. So wird nach zweifacher Differentiation ein Ausdruck von der Art $Zdxdy$ entspringen, während in der einen allein x, in der anderen allein y variabel angenommen worden ist. Gleichermaßen wird auf sechs verschiedene Arten der Ausdruck $Zdxdydz$ hervorgehen und es wird auf vierundzwanzig verschiedene Arten nach vierfacher Differentiation zu demselben Ausdruck dieser Form $Zdxdydzdv$ gelangt werden und so weiter.

§239 Die Gültigkeit dieser Lehrsätze wird jeder mit auch nur geringer Anstrengung aus den zuvor erklärten Prinzipien schnell anerkennen und leichter mit eigenem Nachdenken und Einüben erkennen als durch lange verschachtelte Sätze, ohne welche Beweise nicht vorgetragen werden könnten. Weil aber die Kenntnis dieser Eigenschaften in der Integralrechnung von größter Bedeutung ist, sind Anfänger angehalten, dass sie nicht nur über die Eigenschaften selbst sorgfältig nachdenken und sie einüben und deren Gültigkeit erforschen und für sich bestätigen, sondern auch an mehreren Beispielen prüfen, um sich auf diese Weise mit diesem Gegenstand vertrauter zu machen und die daher entstehenden Erträge später leichter verstehen können. Und in der Tat sind nicht nur die Anfänger, sondern auch die, denen die Prinzipien der Differentialrechnung schon ins Blut übergegangen sind, dazu aufgefordert, weil ja bei fast allen Einführungen in diesen Teil der Analysis dieser Gegenstand gänzlich ausgelassen zu werden pflegt. Meistens waren die Autoren nämlich zufrieden, allein die Differentiationsregeln beschrieben zu haben und deren Gebrauch in der höheren Geometrie gezeigt zu haben, und haben nicht die Natur sowie den Eigenschaften der Differentiale untersucht, woher sich dennoch sehr große Hilfen und überaus nützliche Hilfsmittel auf die Integralrechnung ergießen. Dieses Grundes wegen schien es ratsam, diesem fast neuen Gegenstand in diesem Kapitel gründlicher nachzugehen, damit zugleich der Weg zu anderen schwierigeren Differentiationen bereitet wird und die später anzugehende Aufgabe erleichtert wird.

§240 Nachdem also diese Eigenschaften erkannt worden sind, derer sich Differentiale zwei oder mehrere Variablen involvierender Funktionen erfreuen, werden wir leicht entscheiden können, ob die vorgelegte Differentialformel, in welcher zwei oder mehrere Variablen auftreten, aus der Differentiation einer gewissen endlichen Funktion entstanden ist oder nicht. Wenn nämlich in der Formel $Pdx + Qdy$ nicht $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ war, werden wir gewiss bestätigen können, dass keine Funktion von x und y existiert, deren Differential $= Pdx + Qdy$ ist und daher unten in der Integralrechnung kein Integral einer Formel von dieser Art ausfindig gemacht werden kann. So, weil in $yxdx + xxdy$ die verlangte Bedingung nicht vorhanden ist, ist keine Funktion gegeben, deren Differential $= yxdx + xxdy$ ist. Ob aber immer, sooft $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ gilt, die Formel aus der Differentiation einer gewissen Funktion entsprungen ist, ist eine Frage, die erst aus den Prinzipien der Integration solide bestätigt werden können wird.

§241 Wenn in der vorgelegten Differentialformel drei oder mehrere Variablen enthalten sind, wie $Pdx + Qdy + Rdz$, dann kann sie in keinster Weise ihren Ursprung aus der Differentiation genommen haben, außer wenn diese drei Bedingungen in ihr Geltung haben, dass gilt

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right), \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

Wenn nur eine dieser Bedingungen fehlt, werden wir bestätigen müssen, dass es keine Funktion von x, y und z gibt, deren Differential $Pdx + Qdy + Rdz$ ist; Integrale von Differentialformeln dieser Art können also nicht einmal verlangt werden und werden daher auch gesagt, überhaupt kein Integral zu haben. Es wird aber leicht eingesehen, dass im Integralkalkül Differentialformeln zuvor beurteilt werden müssen, ob sie einer Integration fassungsfähig sind, bevor das Finden des Integrals tatsächlich in Angriff genommen wird.